Notions abordées :

- primitives (définition, primitives usuelles et exemple de calcul) : page 1 et 2
- intégrales : page 2
- intégration par parties et par changement de variable : page 4 et 5
- intégrales et aires : page 5 et 6

1) **Les primitives**

1.1) *Définition et primitives usuelles*

Qu'est-ce qu'une primitive ? Le fait de trouver une primitive consiste plus ou moins à effectuer l'opération « inverse » du calcul de dérivé. **La primitive F d'une fonction f sur un intervalle I est la fonction telle que : $\forall x \in I \;\; F'(x) = f(x)$**. Cette dernière définition permet de retrouver la majorité des primitives usuelles si l'on connaît bien ses dérivées usuelles.

Primitives usuelles :

N.B. : dans le tableau ci-dessous, C est un réel quelconque

Fonction	Intégrable sur …	Primitive
k (avec k réel)	$\mathbb{R}$	$kx + C$
kx (avec k réel)	$\mathbb{R}$	$\frac{k}{2}x^2 + C$
kx^n (avec n entier)	$\mathbb{R}$	$\frac{k}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{k}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_*^+$	$2k\sqrt{x} + C$
$\frac{k}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{k}{x} + C$
$\frac{k}{x}$		$kln(x) + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\frac{k(n-1)}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{k}{x^{n-1}} + C$
$kf'(x)$	Sur l'ensemble de définition de $f'(x)$	$kf(x) + C$
$f'(x) + g'(x)$	---	$f(x) + g(x) + C$
$\frac{v'(x)}{v(x)^2}$	---	$\frac{1}{v(x)} + C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	---	$\ln\big(u(x)\big) + C$
$u'(x)e^{u(x)}$	---	$e^{u(x)} + C$

1.2) *Exemple*

Calculer une primitive sur $\mathbb{R}_*^+$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 3(x^5 + 2xe^{2x+3}) - \frac{6x^2+2}{x^3+x}$

Cette fonction peut paraître rebutante ! Mais si l'on décompose tranquillement, tout se passe bien !

Déjà, on réécrit $f(x)$:

$f(x) = 3x^5 + 6xe^{2x+3} - 2\frac{3x^2+1}{x^3+x} = u'(x) + v'(x) + w'(x)$
Avec : $u'(x) = 3x^5$ $v'(x) = 6xe^{2x+3}$ $w'(x) = -2\frac{3x^2+1}{x^3+x}$

On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$, on a alors : $F'(x) = f(x)$ et $F(x) = u(x) + v(x) + w(x)$

Déterminons $u(x)$, $v(x)$ et $w(x)$ en appliquant les formules de primitives usuelles.

$$u(x) = 3\frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{3x^6}{6} = \frac{3x^6}{3 \times 2} = \frac{x^6}{2}$$
$$v(x) = 3z'(x)e^{z(x)} \text{ avec } z(x) = 2x + 3$$
$$\Longrightarrow v(x) = 3e^{z(x)} = 3e^{2x+3}$$
$$w(x) = -2\frac{3x^2+1}{x^3+x} = -2\frac{g'(x)}{g(x)} = -2\ln\big(g(x)\big) = -2\ln(x^3 + x)$$

Finalement : $F(x) = u(x) + v(x) + w(x) = \frac{x^6}{2} + 2x + 3 - 2\ln(x^3 + x)$

2) **Les intégrales**

Formule	Exemple
Soit f une fonction définie sur un intervalle I Soit $a, b \in I$ et soit F une primitive de f. On a : $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$ N.B. : c'est la définition même d'une intégrale. Le membre gauche de l'égalité se lit « intégrale de a à b de f de x dx ».	$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 3e^{3x+1}$ Alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = e^{3x}$ D'où, par exemple : $$\int_0^1 f(x)dx = [e^{3x}]_0^1 = e^{3\times1} - e^{3\times0} = e^3 - 1$$
Une intégrale n'est rien d'autre qu'une « grosse » somme. Il s'agit d'une opération dite **linéaire**. **Par linéarité de l'intégrale**, on a : (i) $$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$ (ii) $$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$	Exemple d'application de (i) : $$I = \int_0^1 45e^{3x+1}dx = \int_0^1 15 \times 3e^{3x+1}dx$$ Alors par linéarité de l'intégrale, on a : $$I = 15\int_0^1 3e^{3x+1}dx = 15(e^3 - 1)$$

$(iii)\quad \displaystyle\int_a^b a\big(f(x)+g(x)\big)dx$ $\displaystyle = a\int_a^b f(x)dx + b\int_a^b g(x)dx$	Exemple d'application de (ii) : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = 3e^{3x+1} + \dfrac{1}{1+x}$ $\displaystyle J = \int_0^1 \left(3e^{3x+1} + \frac{1}{1+x}\right)dx$ $\displaystyle = \int_0^1 3e^{3x+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ $= (e^3 - 1) + [\ln(1+x)]_0^1$ $= e^3 - 1 + \ln(1+1) - \ln(1+0)$ $= e^3 - 1 + \ln(2)$ N.B. : $\frac{1}{1+x}$ est de la forme $\frac{u\prime(x)}{u(x)}$ alors une primitive de $\frac{1}{1+x}$ est $\ln\big(u(x)\big) = \ln(1+x)$
Soit f une fonction définie sur un intervalle I Soit $a, b, c \in I$ et soit F une primitive de f. On a : $(iv)\quad \displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ Cette relation s'appelle **la relation de Chasles**.	
$(v)\quad \displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	
Enfin, on peut calculer la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$. La relation s'apparente à un calcul de moyenne standard. On parle d'**égalité de la moyenne**. Celle-ci s'écrit : $\displaystyle M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$	

Démonstrations : ci-après, on note F $(resp. G)$ une primitive de f $(resp. g)$ sur $[a\,;b]$.

$$(i)\quad \int_a^b kf(x)dx = kF(b) - kF(a) = k\big(F(b) - F(a)\big) = k\int_a^b f(x)dx$$

$$(ii)\quad I = \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \big(F(b)+F(b)\big) - \big(F(a)+F(a)\big) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$(i) \wedge (ii) \Rightarrow (iii)$

$(iv) \quad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

$(v) \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)dx$

3) **Intégration par parties et par changement de variable**

Soit u' $(resp.\, v')$ une fonction définie sur un intervalle I, soit $a, b \in I$ et soit u $(resp.\, v)$ une primitive de u' $(resp.\, v')$. On a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Cette relation est appelée formule d'intégration par parties.

Démonstration : soient u et v deux fonctions définies dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$.

Alors on a $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. En intégrant, on obtient :

$$\int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\, dx.$$

Or, on peut réécrire chacun des membres de l'équation comme suit :

$$\int_a^b (uv)'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Ce qui nous donne :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

CQFD

Exemple (un peu barbare) : calculer $\mathcal{L}_n = \int_{0^-}^{+\infty} t^n e^{-pt} dt$ à l'aide de plusieurs intégrations par parties ($p \in \mathbb{K}$).

On pose : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = e^{-pt}, \quad v(t) = t^n \quad \Rightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) = -\frac{e^{-pt}}{p}, \quad v'(t) = nt^{n-1}$

$$\mathcal{L}_n = \int_a^b t^n e^{-pt} dt = \int_a^b v(t)u'(t)dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p} t^n\right]_{0^-}^{+\infty} - \int_a^b nt^{n-1}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)dt$$

$$\mathcal{L}_n = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{e^{-pt}}{p} t^n\right) - \lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{e^{-pt}}{p} t^n\right) + \frac{n}{p}\int_a^b t^{n-1}e^{-pt}dt$$

$$\mathcal{L}_n = 0 - 0 + \frac{n}{p}\mathcal{L}_{n-1} = \frac{n}{p}\mathcal{L}_{n-1}$$

Par récurrence, on déduit :

$$\mathcal{L}_n = \frac{n!}{p^n}\mathcal{L}_0 = \frac{n!}{p^n}\int_a^b e^{-pt}dt = \frac{n!}{p^n}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_{0^-}^{+\infty} = \frac{n!}{p^n}\left(0 - \left(-\frac{1}{p}\right)\right) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

N.B. : ce cas farfelu est assez célèbre. $n!/p^{n+1}$ est ce qu'on appelle la transformée de Laplace de la fonction t^n, avec $p \in \mathbb{C}$. La transformée de Laplace est très utilisée dans les enseignements liés à la physique de par ce qu'elle permet de simplifier grandement de nombreux calculs.

Soit f une fonction définie dérivable sur un intervalle I, soit φ une fonction définie dérivable sur J avec $f(J) \subseteq I$ et soit $a, b \in J$. On a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

Cette relation est appelée formule d'intégration par changement de variable.

Démonstration (ça sent la dérivée de fonctions composées !) :

On sait que $(F \circ \varphi)'(x) = (\varphi' \times f(\varphi))(x) = \varphi'(x)f(\varphi(x))$ (dérivation d'une fonction composée)

D'où :

$$\int_a^b (F \circ \varphi)'(x)dx = \boxed{\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx}$$

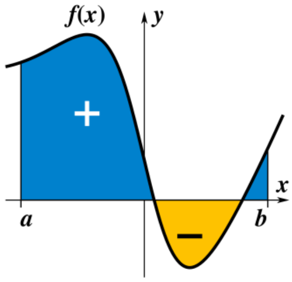
Or :

$\Rightarrow \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)dx = [(F \circ \varphi)(x)]_a^b = [F(\varphi(x))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$

$$\Rightarrow \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)dx = \boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx}$$

4) **Intégrales et aires**

Une autre façon de percevoir une intégrale réside dans le fait que celle-ci représente une aire. Du moins **une intégrale simple représente une aire**. Plus exactement, $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f, et ce de a à b.
Cette aire est comptée négativement si elle est en-dessous de l'axe des abscisses, positivement dans le cas contraire.



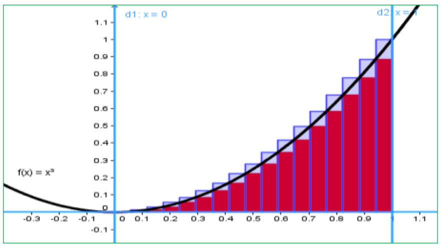
On rappelle qu'on a défini de la manière suivante l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$:
$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a; b]$.

On peut en donner une autre définition dont on prouve l'équivalence avec la première.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; b]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

N.B. : cette somme n'est rien d'autre que la somme de l'aire de rectangles. Cette somme correspond visuellement à l'aire sous (ou sur) la courbe représentative de f.



Visuellement, la somme qu'on a évoquée ci-dessus représente la somme de l'air des rectangles en rouge si on en augmente le nombre. Tous ces rectangles ont même largeur : $\frac{b-a}{n}$. En augmentant le nombre de ces rectangles, la somme de leur aire se rapproche indéfiniment de l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses. C'est l'intégrale !

Démonstration de l'équivalence entre les deux définitions :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} F(x) - F(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x_0)(x - x_0) \qquad \text{par passage à la limite}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \lim_{x\to x_0} f(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \lim_{h\to 0} hf(x_0) \qquad \text{on réécrit la précédente égalité}$$

Ceci n'est nul autre que l'aire d'un rectangle de largeur infinitésimale (h très petit). On n'a plus qu'à les sommer sur un intervalle. On note $x_k = x_0 + kh$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \cdots + \lim_{h\to 0} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \lim_{h\to 0} hf(x_0) + \cdots + \lim_{h\to 0} hf(x_{n-1})$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k)$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{n-1} f(x_0 + kh)$$

On notant $a = x_0$ et $b = x_n = x_0 + nh$, on obtient $\frac{b-a}{n} = \frac{x_0+nh-x_0}{n} = h$ et on retrouve l'autre définition de l'intégrale. La magie… Et ça marche dans les deux sens. Donc il y a équivalence entre les deux définitions.

On remarquera que l'on n'a pas réellement précisé sur quel intervalle une fonction f est intégrable. Et ce n'est en fait pas tout à fait élémentaire. En guise de première approche, on retiendra ceci :

Théorème de Leibniz

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$, si f est continue sur $[a, b]$ alors elle est intégrable sur $[a, b]$.

N.B. : en terminale, on ne demande pas de prouver qu'on puisse intégrer une fonction sur un intervalle. On se rappellera néanmoins qu'au même titre qu'on ne peut dériver nécessairement partout, on ne peut pas forcément intégrer partout.